ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 46 Межвузовский сборник научных трудов 2014

УДК 531.355

Н.Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

ИНТЕГРАЛ ДЕЙСТВИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГИРОСТАТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В СВЕТОВОМ ПОТОКЕ

Приводятся некоторые формы аналитического представления интеграла действия динамической системы гиростата, движущегося в однородном параллельном световом потоке, порождающем поле сил светового давления.

Ключевые слова: интеграл действия; адиабатический инвариант; гиростат; световое давление.

Введение

Интеграл действия I (ИД) или "переменная действие", "действие", является интегралом невозмущённой (порождающей) динамической системы (ДС) [1], усреднённой по фазе [2].

Адиабатическим инвариантом (АИ) динамической системы является функция её фазовых переменных и параметров, для которых значения этой функции мало изменяются при значительном изменении параметров данной системы. Впервые АИ были открыты Л. Больцманом при исследовании адиабатических процессов в термодинамике. Термин "АИ" был введён первоначально П. Эренфестом. Современное общепризнанное определение АИ было сформулировано авторским коллективом, возглавляемым А.А. Андроновым [3].

Характерные величины, относящиеся к ДС, – ИД и АИ– являются составными элементами системных средств, применяемых в методах асимптотического интегрирования многопараметрических ДС, находящихся под воздействием возмущающих факторов.

В теории ДС существует следующая закономерность. Величина, называемая интегралом действия [1] для ДС, является интегралом этой системы, усреднённой по фазе. С другой стороны, интеграл действия является АИ порождающей системы для возмущённой ДС с ненулевыми собственными частотами и медленно изменяющимися параметрами. В более широком смысле переменные "действие" являются почти АИ для невырожденной многочастотной детерминированной ДС эволюционного типа [2].

Имеет место строгое взаимное соответствие между АИ и формальными интегралами ДС, получаемыми применением асимптотических методов теории возмущений. В частности, любой интеграл ДС, находящейся в нерезонансном режиме, является её АИ [4].

Для формального описания свойств нелинейной ДС теория АИ является одним из эффективных инструментов исследования, позволяющих получать необходимые характеристики этой системы, минуя её непосредственное интегрирование [1].

Известно, что ИД, применяемый в теории асимптотического интегрирования ДС, являясь первым интегралом порождающей (невозмущённой) ДС, одновременно является и ее АИ [1]. Точнее, доказано, что если частота ДС *с одной степенью свободы* отлична от нуля, то переменная "действие" является её АИ [2]. С другой стороны, АИ является переменная "действие" в задаче для ДС с постоянными коэффициентами [5]. Эта характерная особенность составляет аналитическую основу для построения асимптотического интегрального многообразия исходной возмущенной динамической системы.

В дальнейшем вместо термина "адиабатический инвариант" применяется термин "интеграл действия".

В настоящей статье рассматривается ИД системы уравнений движения свободного гиростата, находящегося под воздействием поля сил светового давления (СД-поля).

1. Основные предпосылки и первые интегралы

Рассматривается движение свободного от связей гиростата с заданным постоянным результирующим гиростатическим моментом. Гиростат движется так, что его неизменяемая часть (*тело-носитель*) движется вокруг неподвижного полюса O, неизменно связанного с инерциальным пространством. В частности, таким полюсом может являться центр масс гиростата. С телом-носителем гиростата неизменно связан *светоотражающий экран* – тонкая недеформируемая оболочка неизменной конфигурации с заданными постоянными термомеханическими параметрами. На экран падает однородный световой поток в виде пучка параллельных световых лучей постоянной интенсивности.

Введём правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе O: базис Z ($Oz_1z_2z_3$), неизменно связанный с инерциальным конфигурационным пространством, и координатный ортобазис X ($Ox_1x_2x_3$), оси которого направлены по главным в полюсе O направлениям тензора инерции гиростата.

Пусть $\mathbf{s}$ (s_1, s_2, s_3) – *гелиоцентрический орт*, устанавливающий ориентацию светового потока относительно связанного базиса. Этот вектор является *направляющим ортом* светового потока, ориентированным против направления падающего на экран пучка параллельных лучей света.

При определённых ограничениях, принятых для термомеханической модели [6], СД-поле является консервативным.

Обозначим: $\mathbf{A} = diag\,(A_1, A_2, A_3)$ –матрица тензора инерции гиростата в полюсе O; $\boldsymbol{\omega}\,(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – абсолютная угловая скорость носителя гиростата; $\mathbf{k}\,(k_1, k_2, k_3)$ – постоянный гиростатический момент, заданный в базисе X.

Движение гиростата в однородном параллельном СД-поле рассматривается на основе термомеханической модели взаимодействия светового потока с твёрдой поверхностью, учитывающей эффект переизлучения (в тепловом диапазоне) мощности, поглощаемой твёрдой поверхностью экрана [6]. Этой модели соответствует система уравнений, представленных в проекциях на оси координатного ортобазиса X [7]

$$
\begin{aligned}
A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\,\omega_2\omega_3 + k_2\omega_3 - k_3\omega_2 - \\
&\quad - u^F(s_3)\,s_2, \\
A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\,\omega_3\omega_1 + k_3\omega_1 - k_1\omega_3 + \\
&\quad + u^F(s_3)\,s_1, \\
A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\,\omega_1\omega_2 + k_1\omega_2 - k_2\omega_1,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\dot{s}_1 = \omega_3 s_2 - \omega_2 s_3 \qquad (1, 2, 3).
$$

В уравнениях (1) обозначено

$$
u^F(s_3) = m_1 + m_2 s_3 \qquad (-1 < s_3 < 1), \tag{2}
$$

где m_1, m_2 – заданные постоянные термомеханические параметры, характеризующие теплофизические и оптические свойства светоотражающего экрана.

Уравнения (1) образуют нелинейную многопараметрическую систему, характеризующую движение гиростата в консервативном СД-поле с квадратичным потенциалом [8]

$$
U(s_3) = \int u^F(s_3)\,ds_3. \tag{3}
$$

В основу предпосылок для исследования данного вопроса положим термомеханическую модель взаимодействия светового потока с абсолютно твердой поверхностью, построенную в работе [6]. Примем предпосылки, введенные в работах [9, 10], и сводящиеся, в основном, к следующим.

1. Гиростатический момент $\mathbf{k}\,(k_1, k_2, k_3)$ постоянен относительно главного базиса инерции гиростата.

2. Гиростат обладает осевой структурно-динамической симметрией вида

$$
A_1 = A_2 = A, \qquad k_1 = k_2 = 0. \tag{4}
$$

3. Действующее на гиростат СД-поле консервативно с потенциальной функцией $U(s_3)$ (3), принятой в данной модели [6].

4. На гиростат действует внешнее моментно-силовое возмущение $\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Phi})$, где $\boldsymbol{\Phi} = (\theta, \varphi, \psi)^T$ – вектор углов Эйлера, определяющий ориентацию главного координатного базиса гиростата относительно базиса Z. При этом в данном базисе задан вектор $\mathbf{L} = [L_1\ L_2\ L_3]^T$.

Пусть $\qquad Q(\omega_3) = (A_3 - A)\omega_3 + k_3, \qquad 0 < \varepsilon << 1, \qquad (5)$

где ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений. Уравнения движения гиростата (1) при данных предпосылках, обозначениях (2), (5) и условиях (4) в проекциях на оси главного координатного базиса X имеют вид

$$A\dot{\omega}_1 + Q(\omega_3)\omega_2 = -u^F(s_3)s_2 + \varepsilon L_1, \tag{6}$$

$$A\dot{\omega}_2 + Q(\omega_3)\omega_1 = -u^F(s_3)s_1 + \varepsilon L_2,$$

$$A_3\dot{\omega}_3 = \varepsilon L_3.$$

К системе уравнений (6) следует присоединить кинематические уравнения Эйлера

$$\dot{\theta} = \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi \quad (0 < \theta < \pi), \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} + (\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)\begin{bmatrix} -\cos\theta \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sin\theta}$$

и соотношения для координат гелиоцентрического орта $\mathbf{s}$

$$(s_1, s_2, s_3) = (\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \cos\theta). \tag{8}$$

Система уравнений (6)–(8) аналитически замкнута относительно переменных $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Phi})$. В нулевом (при $\varepsilon = 0$) приближении система динамических уравнений (6) обладает независимыми первыми алгебраическими интегралами [9]

$$J_1 \equiv A(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 2U(s_3) = 2h_*, \tag{9}$$

$$J_2 \equiv A(\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2) + G_3^0 s_3 = h_2,$$

$$\omega_3 = \omega_3^0,$$

где обозначено $h_* = h_1 - \dfrac{1}{2}A_3(\omega_3^0)^2, \qquad G_3^0 = A_3\omega_3^0 + k_3,$ причем h_1, h_2 – постоянные интегрирования.

Первые интегралы (9) представим в углах Эйлера

$$\begin{aligned} J_1 \equiv A[\omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha(\omega_3^0)^2] - \\ - 2m_1\cos\theta - m_2\cos^2\theta = 2h_1, \end{aligned} \tag{10}$$

$$J_2 \equiv A(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)\sin\theta + G_3^0\cos\theta = h_2,$$

где обозначено $\alpha = A^{-1}A_3$.

Из системы соотношений (10) и уравнений (7), полагая $u = \cos\theta$, получаем

$$\dot{u}^2 = A^{-1}[(m_2 u^2 + 2m_1 u + \beta_1)(1-u^2) - \\ - A^{-1}(h_2 - G_3^0 u)^2] \equiv f(u), \tag{11}$$

где обозначено $\beta_1 = 2h_*$.

2. Аналитические представления интеграла действия

Рассмотрим задачу о нахождении возможных форм аналитического представления ИД исходной ДС гиростата, соответствующих принятым предпосылкам.

Введём одну из форм представления ИД [11]

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \dot{\theta} d\theta = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\dot{u} du}{1-u^2}, \tag{12}$$

где θ_1, θ_2 – амплитудные (наименьшее и наибольшее) значения угла θ, при которых $\dot{u} = 0$; $u_j = \cos\theta_j\ (j = 1,2)$. В частности, при плоском вращении гиростата имеем $u_1 = 1,\quad u_2 = -1$; при плоских колебаниях относительно положений равновесия $\theta = 0,\ \theta = \pi$ имеем $u_1 = 1,\quad u_2 = -1$, соответственно.

Представим характерный полином (11) (*гиростатическую функцию* $f(u)$) в стандартном виде

$$f(u) = A^{-1}[-m_2 u^4 - 2m_1 u^3 + \\ + (\beta_2 - \beta_1)u^2 + 2\beta_3 u + \beta_4], \tag{13}$$

а ИД (12) – в виде

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2} du, \tag{14}$$

где обозначено

$$\beta_2 = m_2 - A^{-1}(G_3^0)^2, \quad \beta_3 = m_1 + A^{-1} h_2 G_3^0,$$

$$\beta_4 = \beta_1 - A^{-1} h_2^2.$$

Выражение для ИД (14) определяется типом корней полинома (13). В реальном движении гиростата при нулевом приближении должны существовать два, в общем случае, различных действительных корня полинома (13), соответствующих значениям u_1, u_2, таких, что $[u_2, u_1] \in [-1,1]$. Остальные два корня являются либо действительными, либо комплексными. Комплексные корни обозначим $(u_3 \pm iv), (u_4 \pm iv)$. Если эти корни действительные, то положим $(-u_3) > u_4$ при $m_2 > 0$ и $(-u_3) < u_4$ при $m_2 < 0$.

Рассмотрим частный случай движения гиростата, при котором

$$\omega_3^0 = 0, \quad h_2 = 0, \quad k_3 = 0. \tag{15}$$

Значениям (15) соответствует случай плоского движения гиростата. Если при этом все корни полинома (13) действительные и различные, то из соотношений (13), (14) следует

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{C}{A}\Bigg[\left(m_1 u_3 + \frac{m_2 \nu_1}{2} + h_1\right) K(k) + \\ + \frac{m_2 \nu_2}{2} E(k) + \left(m_1 \gamma_1 + \frac{m_2 \nu_3}{2}\right) \Pi\,(n,k)\Bigg]. \end{aligned} \tag{16}$$

В равенстве (16) обозначено: $K(k), E(k), \Pi(n,k)$ – полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода, соответственно [12];

$$k = \left[\frac{(u_2 - u_1)(u_3 - u_4)}{(u_2 - u_4)(u_3 - u_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

– модуль эллиптических интегралов;

$$n = \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_3}$$

– параметр эллиптического интеграла третьего рода;

$$C = 4[A^{-1} m_2 (u_1 - u_3)(u_2 - u_4)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \gamma_1 = u_2 - u_3, \quad \nu_1 = u_3^2 - \sigma,$$

$$\sigma = \frac{\gamma_1^2}{2\,(n+1)}, \quad \nu_2 = \frac{n\sigma}{D}, \quad D = n + k^2,$$

$$\nu_3 = 2\gamma_1 u_3 + \nu_2 [D + 2 + (1 + 3n^{-1}) k^2].$$

В случае, при котором для плоского движения гиростата существуют два действительных различных и два комплексных корня полинома (13) $u_* \pm i\,v,\ u_* = (u_3, u_4)$, выражение для ИД (14) принимает вид

$$I_2 = \frac{C}{A}\left[\left(m_1\lambda + \frac{m_2 \nu_4}{2} + h_1\right)K(k) + \right.$$
$$\left. + \frac{m_2 \nu_5}{2} E(k) + \left(m_1\gamma_2 + \frac{m_2 \nu_6}{2}\right)\Pi(n,k)\right], \qquad (17)$$

где обозначено

$$k = \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad n = w^{-1}\left(\frac{w-1}{2}\right)^2,$$

$$C = 4\left(\frac{m_2}{A}w_2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda = \frac{w u_1 - u_2}{w-1},$$

$$w_1 = (u_1 - u_*)(u_2 - u_*) + v^2,$$

$$\sigma_j = [(u_j - u_*)^2 + v^2]^{\frac{1}{2}} \quad (j = 1,2),$$

$$w_2 = \sigma_1 \sigma_2, \qquad w = \sigma_1^{-1}\sigma_2,$$

$$\gamma_2 = \frac{2(n+1)\,w}{w^2 - 1}(u_2 - u_1),$$

$$\nu_4 = \lambda^2 - \nu, \quad \nu_5 = \frac{n\nu}{D}, \quad \nu = \frac{\gamma_2^2}{n+1},$$

$$\nu_6 = \left[\left(1 + \frac{k^2}{D}\right)\gamma_2 + 2\lambda\right]\gamma_2.$$

Рассмотрим случай пространственного движения гироста-та. Если все корни полинома (13) действительные и различные, то ИД (14) выражается равенством

$$I_p = I_1 - \frac{1}{2}\left[(\delta_1 p_1 + \delta_2 p_2)\,K(k) + \sum_{j=1}^{2}\delta_j\,(q_j - p_j)\,\Pi\,(e_j, k)\right], \qquad (18)$$

где обозначено

$$(\delta_1, \delta_2) = \frac{1}{2}(\omega_3^0 \mp A^{-1} h_2)^2,$$

$$(q_1, q_2) = (1 \mp u_2)^{-1}, \qquad u_i \neq 1 \quad (i = 2, 3),$$

$$(e_1, e_2) = n\,\frac{1 \mp u_3}{1 \mp u_2}, \qquad (p_1, p_2) = (1 \mp u_3)^{-1},$$

причем величина I_1 определяется выражением (16) при соответствующих ему обозначениях.

Если для полинома (13) имеют место два действительных различных и два комплексных корня, то ИД (14) определяется выражением

$$I_q = I_2 - \frac{1}{2}\left[(\delta_1 p_1 + \delta_2 p_2)\, K(k) + (n+1) \sum_{j=1}^{2} \delta_j q_j \, \Pi(e_j, k) \right], \qquad (19)$$

где величина I_2 определяется равенством (17). В соотношении (19) обозначено

$$(p_1, p_2) = \frac{w-1}{wf_{12} - f_{34}}, \quad (q_1, q_2) = \frac{w+1}{wf_{12} + f_{34}} - (p_1, p_2),$$

$$(e_1, e_2) = \frac{(wf_{12} - f_{34})^2}{4w\, f_{12}\, f_{34}}, \qquad (f_1, f_2) = f_{12} = 1 \mp u_1,$$

$$(f_3, f_4) = f_{34} = 1 \mp u_2.$$

Все остальные обозначения здесь используются прежние.

Таким образом, каждое из выражений для ИД (18), (19) содержит пять полных эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода.

3. Частные виды представления интеграла действия

Рассмотрим характерные частные случаи полученных выражений для ИД. Пусть при плоском движении гиростата выполняется ограничение, относящееся к параметрам величины I_1

$$4D(n+1)u^F(u_3) + n\, m_2 [D + 2 + (1 + 3n^{-1})k^2]\gamma_1 = 0$$

и, кроме того, пусть имеем $(-u_3) = u_4 + \varepsilon_1$ или $u_2 = u_1 + \varepsilon_2$, где $(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|) << 1$ – достаточно малые величины. Предполагается, что $\varepsilon_1 > 0$ при $m_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ при $m_2 < 0$. Предположение о достаточной близости действительных корней u_3, u_4 или, соответственно, u_1, u_2, реализуется в случае малости величины модуля k эллиптических интегралов. Это позволяет использовать разложения интегралов K (k), E (k) в ряды по степеням малого параметра k в окрестности точки $k = 0$ [12, с. 26]. Используя эти разложения, в результате из соотношения (16) получаем

$$I_1 = \frac{\pi C}{16A}[(2m_1u_3 + m_2\nu_1 + 2h_1)(k^2 + 4) - m_2\nu_2(k^2 - 4)] + O(k^4),$$

откуда при $k \to 0$ следует предельное значение

$$I_1^* = \frac{\pi C}{4A}(m_2u_3^2 + 2m_1u_3 + 2h_1). \tag{20}$$

Выражение, содержащееся в скобках равенства (20), согласно интегралу энергии (10) и определяющему уравнению (11) является характерной величиной [9].

Пусть в плоском движении выполняется ограничение, относящееся к параметрам величины I_2

$$2Du^F(\lambda) + m_2(D + k^2)\gamma_2 = 0, \tag{21}$$

где величина u^F определяется равенством (2). Введем малый параметр $0 < \varepsilon_3 << 1$ и примем условие

$$q^2 \equiv (u_1 - u_2)^2\nu^2 = 4w_1\varepsilon_3 \qquad (w_1 > 0) \tag{22}$$

и тогда в линейном по ε_3 приближении имеем

$$w_1 = w_2 - 2\varepsilon_3, \qquad k = (w_2^{-1}\varepsilon_3)^{\frac{1}{2}} \quad (w_2 > 0).$$

В силу этого в линейном по ε_3 приближении наряду с равенством (22) имеет место соотношение

$$q^2 = 4w_2\,\varepsilon_3 \qquad (w_2 > 0).$$

Используя разложения интегралов K (k), E (k) в ряды по степеням малого параметра k в окрестности точки $k = 0$ при условиях (21), (22), в результате из равенства (17) получаем

$$I_2 = \frac{\pi C}{16A}[(2m_1\lambda + m_2\nu_4 + 2h_1)(k^2 + 4) -$$
$$- m_2\nu_5(k^2 - 4)] + O(k^4).$$

Приведем выражения для ИД в случае, при котором выполняется термомеханическое условие [10]

$$m_2 = 0. \tag{23}$$

При выполнении условия (23) потенциал $U(s_3)$ (2), (3) становится линейным. Это ограничение может быть реализовано путем определенного подбора конфигурации светоотражающего экрана и его термомеханических параметров. Таких вариантов подбора существует несколько. Укажем один из них, при котором должны одновременно выполняться следующие условия.

1. Светоотражающий экран гиростата является поверхностью, образованной вращением параболы четной степени вокруг его оси кинетической симметрии.

2. Центр масс гиростата расположен на середине отрезка оси вращения, образованного проекцией светоотражающего экрана на эту ось.

3. Выполняется по крайней мере одно из следующих условий, обусловленных принятой термомеханической моделью [6]. Либо сторона экрана, обращенная к падающему световому потоку, является абсолютно черным телом, либо вся мощность падающего на экран светового потока распределяется изотропно в полусфере экрана, обращенной к потоку.

Гиростатическая функция (13) при условии (23) вырождается в полином третьей степени

$$g(u) = A^{-1}[(2m_1 u + \beta_1)(1-u^2) - A^{-1}(h_2 - G_3^0 u)^2] \tag{24}$$

и аналитическое выражение для ИД устанавливается аналогом соотношения (14) − определяющим равенством

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{g(u)}}{1-u^2} du. \tag{25}$$

Движение гиростата в этом случае реализуется, если только все корни полинома (24) действительные [13]. Примем условия $u_1 > u_2 > u_3$ для $m_1 > 0$, где u_1, u_2 − наименьшее и наибольшее значения величины $u = \cos\theta$, соответственно. Положим также $u_1 < u_2 < u_3$ для $m_1 < 0$, где u_1, u_2 – наибольшее и наименьшее значения, соответственно.

При плоском движении гиростата, когда выполняются условия (15), для ИД (25) с учетом равенства (24) получаем

$$I_1 = A^{-1} C[(m_1 u_3 + h_1)K(k) + m_1 \gamma_1 E(k)]. \tag{26}$$

В равенстве (26) обозначено

$$k = \left(\frac{u_1 - u_2}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad C = 4\left(2\frac{m_1}{A}\gamma_1\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_1 = u_1 - u_3.$$

В случае плоского вращения гиростата, когда $h_1 > |m_1|$, выражение (26) принимает вид

$$I_1 = 2A^{-1}[2(h_1 + |m_1|)]^{\frac{1}{2}} E(k). \tag{27}$$

При $h_1 < |m_1|$, что соответствует режиму плоских колебаний гиростата в световом потоке, ИД (26) определяется выражением

$$I_1 = 2A^{-1}\sqrt{|m_1|}\ [(h_1 - |m_1|)K(k) + 2|m_1|E(k)]. \tag{28}$$

Для пространственного движения гиростата при условии (23) выражение для ИД (25) представляется в форме

$$I_p = I_1 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \delta_j p_j \Pi(e_j, k), \tag{29}$$

где величина I_1 выражается одним из соотношений (27), (28). В равенстве (29) обозначено

$$(p_1, p_2) = (1 \mp u_1)^{-1},$$

$$(e_1, e_2) = (u_2 - u_1)(u_1 \mp 1),$$

а величины δ_j, k выражаются равенствами, относящимися к соотношениям (18), (26), соответственно.

4. Применение и оценка интеграла действия

В возмущенном движении, определяемом ДС (6)–(8) при $\varepsilon \neq 0$, имеет место эволюция фазовых траекторий на плоскости переменных $(\theta, \dot{\theta})$. В силу этого фазовые траектории могут пересекать сепаратрисы, переходя из области вращательного движения в область колебаний и наоборот. В результате такого рода переходов может качественно измениться характер движения гиростата, определяемый значениями параметров m_1, m_2, h_1, h_2, ω_3^0. Трудности асимптотического интегрирования возмущенной ДС (6)–(8) вызывают необходимость применения обходных путей нахождения оценок некоторых величин, характеризующих тип движения гиростата в данном режиме.

Такому подходу способствует применение ИД как первого интеграла порождающей (невозмущенной) ДС. Использование ИД как адиабатического инварианта ДС позволяет находить некоторые характеристики состояния гиростата, минуя интегрирование исходной возмущенной ДС [1].

В качестве примера рассмотрим случай, при котором ДС (6), помимо $\mathbf{L}$-возмущений, получает возмущения вследствие медленного изменения во времени значений термомеханических параметров светоотражающего экрана m_1, m_2. За достаточно большой промежуток времени $T = (0 \le t < \varepsilon^{-1})$ это возможно вследствие изменения:

– величины коэффициента поглощения падающего светового потока на поверхность экрана, обращенную к потоку;

– величины коэффициента рассеяния мощности падающего на экран светового потока, распределяемой изотропно в полусфере экрана, обращенной к потоку;

– характеристик степени черноты прямой и обратной сторон экрана;

– конфигурации экрана вследствие длительного воздействия на него агрегативной окружающей космической среды.

Перечисленные факторы соответствуют принятой термомеханической модели, предложенной в работе [6].

Пусть $\tau = \varepsilon t$ – медленное время. Тогда в возмущенном движении имеем $m_j = m_j(\tau)$ $(j = 1,2)$, а в невозмущенном (при $\varepsilon = 0$) $m_j = m_j^0 = const\,(j = 1,2)$. Полагаем, что возмущающий силовой момент $\mathbf{L} = 0$ и возмущения ДС (6) порождаются только медленным изменением термомеханических параметров m_1, m_2. Как известно [1], для такого рода ДС величина ИД сохраняется для широкого класса задаваемых начальных значений.

Рассмотрим ИД типа (14) и пусть I – его аналитическое выражение для невозмущенной заданной ДС; J_1, J_2 – выражения для первых интегралов (10) данной системы. Тогда для возмущенной ДС в линейном по ε приближении имеем

$$(J_1(\tau), J_2(\tau)) = (J_1, J_2) + O(\varepsilon),$$

$$f(u, \tau) = f(u) + O(\varepsilon),$$

где полином $f(u)$ определяется выражением (13). В силу этого для возмущенного движения на отрезке времени T получаем

$$I(\tau) = I + Z(u_1, u_2, \omega_3^0) + O(\varepsilon), \tag{30}$$

где $I = const$ – интеграл порождающей (при $\varepsilon = 0$) исходной ДС, определяемый выражениями (13), (14);

$$Z(u_1, u_2, \omega_3^0) = \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{f(u)}}.$$

Величина Z может быть выражена через полные эллиптические интегралы первого и третьего рода [12]. В качестве примера приведем случай, при котором корни полинома $f(u)$ – все действительные и различные, причем

$$u_1 > u \geq u_2 > u_3 > u_4. \tag{31}$$

Рассмотрим интеграл с заданным действительным параметром $p \neq u_1$

$$F(p) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(p-u)\sqrt{f(u)}},$$

который в силу условий (31) определяется выражением [12]

$$F(p) = \frac{2(u_1 - p)K(k) - (u_1 - u_4)\Pi(n,k)}{(p-u_1)(p-u_4)\sqrt{(u_1-u_3)(u_2-u_4)}},$$

где обозначено

$$k = \left[\frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_4)}{(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)} \right]^{\frac{1}{2}}, \qquad n = \frac{(u_2 - u_1)(p - u_4)}{(u_2 - u_4)(p - u_1)}.$$

Согласно последнему соотношению для $F(p)$ имеем

$$Z(u_1, u_2, \omega_3^0) = \frac{1}{4}[F(1) - F(-1)].$$

Таким образом, накопление возмущений в ДС при изменении величины ИД $I(\tau)$ в пределах отрезка времени T, согласно равенству (30), пропорционально величине Z (30), определяемой последними соотношениями для $F(p)$, $Z(u_1, u_2, \omega_3^0)$.

Заключение

Такие инварианты, как ИД и АИ, могут применяться для исследования инвариантных динамических свойств гиростата, движущегося в СД-поле.

Рассмотренная частная задача о построении аналитических форм ИД по углу нутации логически связана с общей фундаментальной проблемой исследования свойств движения гиростата в поле сил светового давления. При этом оценка полученных форм приближённого представления в линейном приближении при воздействии возмущений позволяет для каждой рассматриваемой задачи о движении получить заключения качественного характера о режиме движения гиростата.

Соотношение (11), содержащее гиростатическую функцию $f(u)$, можно рассматривать как первый интеграл гамильтоновой ДС с одной степенью свободы. Для этой системы частота движения фазовой точки по замкнутым фазовым траекториям отлична от нуля. Это позволяет отождествлять ИД исходной ДС с её АИ [2].

Характерно, что в случае осевой кинетической симметрии гиростата ИД системы его уравнений движения выражается в конечном виде через заданные параметры задачи в эллиптических квадратурах.

Библиографический список

1. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.

2. *Арнольд В.И. и др.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники / Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

3. *Бакай А.С., Степановский Ю.П.* Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.

4. *Джакалья Г.Е.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.

5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.

6. *Коган А.Ю., Кирсанова Т.С.* Термомеханические явления в движении относительно центра масс космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космические исследования. 1992. Т. 30. Вып. 3. С. 312−320.

7. *Макеев Н.Н.* Динамика гиростата в радиационном силовом поле // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 1 (24). С. 36–45.

8. *Макеев Н.Н.* Интегралы динамики гиростата в световом потоке // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 3 (22). С. 50−58.

9. *Макеев Н.Н.* Угловое движение симметричного космического аппарата с солнечным стабилизатором // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы / Пермский ун-т. Пермь, 1996. С. 105−112.

10. *Макеев Н.Н.* Редукция уравнений движения космического аппарата // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы / Пермский ун-т. Пермь, 1997. С. 78−85.

11. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1971. 507 с.

12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967. 300 с.

13. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.